SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

U. MASSARI

NUOVE TECNICHE NELLO STUDIO DEI CONI MINIMI

BOLOGNA, 21 APRILE 1985

Nella teoria delle superfici minime di codimensione uno, la esistenza o meno di coni minimi singolari interviene nello studio di due tipi di problemi:

1) la regolarità delle frontiere minime,
2) il teorema di Berstein.

1. Se $\Omega \subset R^n$ è un aperto, diremo che E ha frontiera minima in Ω se

$$P(E, A) < +\infty \qquad \forall \text{aperto } A \subset\subset \Omega \quad e$$

$$P(E, A) \leq P(F, A) \qquad \forall F \text{ con } E \Delta F \subset\subset A$$

dove

$$P(E,A) = \sup \{ \int_E \operatorname{div} g(x) dx ; \; g \in C_0^1(A, R^n) \; , \; |g| \leq 1 \}$$

De Giorgi in [1], ha dimostrato che se un insieme E ha frontiera minima in un aperto $\Omega \subset R^n$, allora ∂E contiene un aperto $\partial^* E$ (la frontiera ridotta di E) che è una varietà analitica di codimensione 1 e con curvatura media zero in ogni punto ed inoltre $H_{n-1}[(\partial E - \partial^* E) \cap \Omega] = 0$.

Ora supponiamo che un insieme E abbia frontiera di misura minima in $\Omega = B_1(0)$ e che $0 \in \partial E$, consideriamo una omotetia di centro 0 e raggio ρ; ossia l'applicazione $\theta_\rho(x) = \rho x$, essendo

$$P(E, B_1) = \rho^{1-n} P(\theta_\rho(E), B_\rho)$$

l'insieme $\theta_\rho(E)$ ha frontiera minima in B_ρ, inoltre per $\rho \to \infty$, $\theta_\rho(E)$ contiene una successione che converge in $L^1_{loc}(R^n)$ ad un insieme C. Tale insieme è un cono di vertice 0 (cono tangente a ∂E in 0), ha frontiera di

misura minima in R^n ed è singolare nel vertice se e solo se lo zero era un punto singolare in ∂E ($0 \in \partial E - \partial^* E$).

Pertanto esistono frontiere di misura minima con punti singolari se e solo se esistono coni minimi singolari in tutto R^n.

2. Il teorema di Berstein è il seguente teorema (enunciato e dimostrato da Bernstein in [2])

"Se $f \in C^2(R^2)$ è soluzione dell'equazione delle superfici minime in tutto R^2, cioè se

$$Mf(x_1,x_2) = \sum_{i=1}^{2} D_{x_i}\left(\frac{D_{x_i} f}{\sqrt{1+|Df|^2}}\right) = 0 \quad \forall (x_1,x_2) \in R^2 ,$$

allora f è un polinomio di primo grado".

La dimostrazione data da Berstein di questo risultato e successive semplificazioni sono legate a proprietà di funzioni di variabile complessa e quindi non estendibili al caso di n variabili ($n > 2$).

Due osservazioni, fatte rispettivamente da Fleming [3] e De Giorgi [4] hanno permesso un passo in avanti nello studio dell'estendibilità del teorema di Berstein al caso di più variabili.

Fleming ha osservato che se $f \in C^2(R^n)$ verifica l'equazione della superfice minime su tutto R^n allora l'insieme $E = \{(x,y) \in R^{n+1} \;, \; y < f(x)\}$ ha frontiera minima in tutto R^{n+1} e la famiglia $\theta_\rho(E)$ quando $\rho \to 0$, contiene una successione che converge in $L^1_{loc}(R^{n+1})$ ad un cono C di vertice l'origine. Tale cono C ha frontiera di misura minima in R^{n+1} ed è singolare nel vertice se è solo se f non è un polinomio di primo grado.

De Giorgi ha poi dimostrato che se f non è un polinomio di primo grado, il cono C ottenuto da Fleming non può essere singolare solo nel vertice, ma $\partial C - \partial^* C$ deve contenere almeno una semiretta. Ora per risultati noti della teoria delle superfici minime, se C è un cono mini-

mo di vertice l'origine e $x_0 \in \partial C - \partial^* C$ ($x_0 \neq 0$), allora la famiglia $\theta_{\rho,x_0}(C)$ dove $\theta_{\rho,x_0}(x) = \rho(x-x_0)$ per $\rho \to +\infty$, contiene una successione che converge in $L^1_{loc}(R^{n+1})$ ad un cono minimo D con vertice in x_0, singolare in x_0. Per di più il cono D è un cilindro. Quindi con una opportuna rotazione del sistema di riferimento D si può scrivere come $D = C' \times R$ dove C' è un cono in R^n singolare nel vertice con frontiera di misura minima in tutto R^n.

Pertanto esistono soluzioni dell'equazione delle superficie minime in R^n non polinomi di primo grado se e solo se esistono coni minimi singolari in R^n.

Fondamentali risultano dunque in questa teoria i seguenti teoremi dovuti rispettivamente a Simons [5] e Bombieri-De Giorgi-Giusti [6].

<u>Teorema (Simons)</u>. Se $n \leq 7$, non esistono coni minimi singolari in R^n.

<u>Teorema (B-De G.-G)</u>. Il cono

$$C_{4,4} = \{(x,y) \in R^4 \times R^4 \quad , |x|^2 > |y|^2\}$$

ha frontiera di misura minima su tutto R^8.

Sono stati poi studiati più in generale coni del tipo

$$C_{h,K} = \{(x,y) \in R^h \times R^K \quad \alpha|x|^2 > |y|^2\} \qquad \alpha = \frac{K-1}{h-1}$$

ottenendo i seguenti risultati:

1) se $h + K \geq 9$, allora $C_{h,K}$ ha frontiera di misura minima in R^{h+K}(Lowon [7])

2) se $h + k = 8$ e $|h-K| < 4$, allora $C_{h,K}$ ha frontiera orientata di misura minima in R^8, mentre $C_{2,6}$ (e $C_{6,2}$) non ha frontiera di misura minima (Simoes [8]).

Lo scopo di questo seminario è di illustrare una dimostrazione molto semplice rispetto a quelle note in letteratura della minimalità dei coni $C_{h,K}$.

L'idea della nuova dimostrazione è nata sostanzialmente dalla seguente osservazione.

Sia B la sfera unità in R^8, $\partial_1 B = \partial B \cap C_{44}$ $\partial_2 B = \partial B - C_{44}$ e f_j la soluzione del seguente problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} Mf_j = 0 & \text{in } B \\ f_j = j & \text{in } \partial_1 B \\ f_j = -j & \text{in } \partial_2 B \end{cases}$$

Per ragioni di simmetria $f_j = 0$ in $\partial C_{44} \cap B$. Inoltre per il principio del massimo, $f_j \to +\infty$ in un intorno di $\partial_1 B$ e $f_j \to -\infty$ in un intorno di $\partial_2 B$. Inoltre l'insieme $P = \{x \in B \mid \lim_{j\to+\infty} f_j(x) = +\infty\}$ ha frontiera orientata di misura minima in B. Quindi se $C_{4,4}$ ha frontiera minima, $P = C_{4,4} \cap B$. Allora $C_{4,4} \cap B$ ha la seguente proprietà:

$$\exists f_j \in C^2(C_{44} \cap B) \quad \text{con} \quad \begin{array}{ll} Mf_j = 0 & \text{in } C_{44} \cap B \\ f_j = 0 & \text{in } \partial C_{44} \cap B \\ f_j \to +\infty & \text{in } C_{44} \cap B \end{array}$$

Viene quindi spontaneo chiedersi questo "se $\Omega \subset R^n$ è un aperto tale che $\exists f_j \in C^2(\Omega)$ con $M(f_j) = 0$ in Ω $f_j = 0$ su $\partial\Omega$ e $f_j \to +\infty$ in $\Omega \Rightarrow \Omega$ ha qualche proprietà di minimo?"

Va osservato subito che basta richiedere l'esistenza di una successione di sottosoluzioni col comportamento richiesto, perché esista anche una successione di soluzioni.

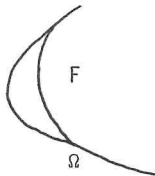
Ora se $\exists\, f_j \in C^2(\Omega)$ con $Mf_j \geq 0$ $f_j = 0$ su $\partial\Omega$ e $f_j \to +\infty$ in Ω, l'insieme

$$E_j = \{(x,y) \in R^{n+1} \quad x \in \Omega, \quad y < f_j(x)\}$$

ha perimetro minimo rispetto a variazioni compatte in $\Omega \times R$ che diminuiscono E_j, cioè se $A \subset\subset \Omega \times R$ $F \subset E_j$ $F \Delta E_j \subset\subset A$

$$P(E_j,A) \leq P(F,A)$$

D'altra parte $E_j \to \Omega \times R$ e quindi $\Omega \times R$ mantiene la stessa proprietà cioè variazioni compatte di $\Omega \times R$ in $\Omega \times R^+$ che diminuiscono l'insieme aumentano l'area, allora anche Ω ha la stessa proprietà cioè $\forall A \subset\subset R^n$

$$P(\Omega,A) \leq P(F,A) \qquad \forall F \subset \Omega \qquad F \Delta \Omega \subset\subset A$$

Ne segue che se riesco a trovare una successione con le proprietà richieste per Ω e $R^n - \Omega \Rightarrow \Omega$ ha frontiera di misura minima.

Nel caso poi che Ω sia un cono, come nella situazione che sto considerando, una successione con le proprietà richieste si attiene subito se riesco a trovare $f \in C^2(\Omega)$ con

$M(f) \geq 0$ in Ω $f = 0$ su $\partial\Omega$, $f > 0$ in Ω f omogenea di grado $\alpha \neq 1$.

Infatti $f_\rho(x) = \rho^{-1} f(\rho x)$ verifica

$$Mf_\rho(x) = \rho Mf(\rho x) \qquad f_\rho = 0 \text{ su } \partial\Omega$$

$f_\rho(x) = \rho^{\alpha-1} f(x)$ quindi $f_\rho \to +\infty$ per $\rho \to +\infty$ se $\alpha-1 > 0$, $f_\rho \to +\infty$ per $\rho \to 0$ se $\alpha-1 < 0$ in Ω.

Si verifica ora facilmente che la funzione $f(x,y) = (\alpha|x|^2 - |y|^2)|x|^2$ ha le proprietà richieste per $\Omega = C_{h,k}$.

La scelta di f per $R^n - C_{h,k}$ presenta qualche maggior difficoltà. In ogni caso le seguenti funzioni vanno bene:

a) $h + k = 8$ $h = 3$, $k = 5$

$f(x,y) = (|y|^2 - 2|x|^2)|y|^2$ [9],

b) $h + k = 8$ $h = 4$, $k = 4$

$f(x,y) = (|y|^2 - |x^2|)(|x|^2 + |y|^2)$ [10],

c) $h + k \geq 9$

$f(x,y) = (|y|^2 - \alpha|x|^2)(\beta(\alpha)|x|^2 + |y|^2)$ [11].

Interessante osservare che anche nel caso $h + k = 8$ $h = 2$ $k = 6$ la funzione $f(x,y) = (5|x|^2 - |y|^2)|x|^2$ ha le proprietà richieste quindi il cono $C_{2,6}$ ha una proprietà di minimo rispetto a variazioni compatte che diminuiscono l'insieme (da ricordare che $C_{2,6}$ non ha frontiera minima).

BIBLIOGRAFIA

[1] DE GIORGI E.:"Frontiere orientate di misura minima". Sem. Mat. Scuola Norm. Superiore Pisa, 1960-61.

[2] BERSTEIN N.S.: "Sur un théorème de géométrie et ses applications aux équations aux dérivées partielles du type elliptique". Comm. Soc. Math. de Kharkov 15 (1915-1917).

[3] FLEMING W.H.: On the oriented Plateau problem. Rend. Sem. Math. Palermo II, 11 (1962) 69-90.

[4] DE GIORGI E.: "Una estensione del teorema di Bernstein". Ann. Scuola Norm. Superiore Pisa 19 (1965) 79-85.

[5] SIMONS J.: "Minimal varieties in riemannian manifolds". Ann. of Math. 88 (1968) 62-105.

[6] BOMBIERI E.-DE GIORGI E.-GIUSTI E.: "Minimal cones and the Berstein problem". Invent. Math. 7 (1969) 243-268.

[7] LAWSON H.B.: "The equivariant Plateau problem and interior regularity". Trans. Amer. Math. Soc. 173 (1972) 231-249.

[8] SIMOES P.: "On a class of minimal cones" Bull. Amer. Math. Soc. 80, 3 (1974) 488-489.

[9] SASSUDELLI G.-TAMANINI I. "On a singular solution to the Plateau problem in R^8. Preprint.

[10] MASSARI U.-MIRANDA M.: A remark on minimal cones". Boll. Un. Mat. Ital. (6) 2-A (1983), 123-125.

[11] CONCUS P.-MIRANDA M.: Macsyma and minimal surfaces". Preprint.